Teoria ergodyczna
WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład 1

08/10/08

TEORIO-MIAROWY UKŁAD DYNAMICZNY, DZIAŁANIE PÓŁGRUPY
PRZYKŁADY

Koncepcja układu dynamicznego

Abstrakcyjny układ dynamiczny to zbiór X i jego ewolucja w czasie zadana rodziną przekształceń $T_t : X \to X$ ($t \in time$). Czas *time* może być ciągły lub dyskretny (istnieją sposoby przejścia od jednego modelu do drugiego). Interpretujemy to tak, że punkt x po czasie t wędruje do punktu $T_t(x)$. Dlatego zakładamy od razu, że $T_0 = id$ (po czasie zero każdy punkt pozostaje tam gdzie był). Pożądane jest aby ,,prawa ewolucji" nie zmieniały się w czasie, to znaczy, aby nie zależały od chwili początkowej (zerowej). Sprowadza się to do prawa składania: $T_{t+s} = T_t \circ T_s$. Mamy wtedy półgrupę przekształceń z jednością (czyli elementem neutralnym – jest nim T_0). Jeśli czas jest dyskretny $time = \mathbb{N}_0$ lub $\mathbb{Z}$, to cała półgrupa zadana jest jednym przekształceniem $T = T_1$ jako potęgi iteracyjne $T_n = T^n$. Dla $time = \mathbb{Z}$ T musi być odwracalne i $T_{-1} = T^{-1}$. Dla czasu ciągłego mamy dwa przypadki $time = [0, \infty)$ lub $time = \mathbb{R}$. W tym drugim przypadku każdy T_t musi być odwracalny i $T_{-t} = T_t^{-1}$. Rozważa się też działania innych półgrup (najczęściej grup) np. $\mathbb{Z}^d$ lub $\mathbb{R}^d$, a nawet grup nieprzemiennych takich jak grupa wolna. My jednak zajmować się będziemy głównie czasem dyskretnym $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{N}_0$ (kaskady) rzadziej czasem ciągłym $\mathbb{R}$ (potoki).

Badaczy układów dynamicznych interesuje przede wszystkim zachowanie się układu po bardzo długim czasie (bliskim nieskończoności), a w szczególności własności statystyczne trajektorii punktów $(T_t(x))_{t \in time}$. Chodzi tu najczęściej o graniczne (przy $n \to \infty$) zachowanie się *frekwencji odwiedzania zbioru*, tzn. stosunków $\frac{\#\{0 \le i < n :\, T^i(x) \in A\}}{n}$ (gdzie A jest ustalonym podzbiorem X).

Najczęściej rozważa się sytuację, gdy zbiór X wyposażony jest w jakąś strukturę, a działanie półgrupy T_t jest zgodne z tą strukturą. Klasycznie istnieją trzy piętra takich struktur:

1. układy gładkie: X ma strukturę rozmaitości różniczkowej, a T_t są dyfeomorfizmami,
2. układy topologiczne: X ma strukturę przestrzeni topologicznej (metrycznej), a T_t są homeomorfizmami lub przynajmniej ciągłe,
3. układy miarowe: X ma strukturę przestrzeni miarowej, a T_t są odwzorowaniami mierzalnymi zachowującymi miarę.

Struktura 1 oczywiście implikuje istnienie struktury 2. Okazuje się, też, że przy pewnych założeniach (zwartość) struktura 2 implikuje istnienie struktury 3 (ale często na wiele sposobów). Można więc myśleć, że podejście 3 jest najogólniejsze. Teoria ergodyczna zajmuje sie właśnie tym podejściem.

Czas ciągły versus dyskretny

Przejście od czasu ciągłego do dyskretnego jest bardzo proste: jeśli mamy półgrupę przekształceń $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (lub $t \geq 0$) to ograniczając sie do chwil całkowitych (naturalnych) $t \in \mathbb{Z}$ (lub $t \in \mathbb{N}_0$) dostajemy układ dynamiczny z czasem dyskretnym na tej samej przestrzeni X. Wtedy odwzorowaniem generującym całe działanie jest $T = T_1$ (tzw. *time-one map*).

Przejście odwrotne jest zagadnieniem o wiele bardziej skomplikowanym. Na to, aby dane odwzorowanie T mogło być traktowane jako ,,time-one map" dla pewnego potoku T_t na X muszą w szczególności istnieć wszystkie pierwiastki odwzorowania T, czyli odwzorowania $T_{1/n}$ takie, że $T_{1/n}^n = T$. Nie zawsze jest to możliwe. Na przykład jeśli $X = \{-1, 1\}$ i $T(x) = -x$, to nie istnieje pierwiastek drugiego stopnia $T_{1/2}$.

Natomiast zawsze możliwe jest zbudowanie potoku na większej przestrzeni, tak aby X był zbiorem T_1-niezmienniczym ($T_1(X) \subset X$) i żeby $T = T_1|_X$. Mianowicie bierzemy $Y = X \times [0, 1)$ i definiujemy potok następująco:

$$T_t(x, y) = \begin{cases} (x, y + t) & \text{gdy } y + t < 1 \\ (T(x), 0) & \text{gdy } y + t = 1. \end{cases}$$

Dla większych t dzielimy t na odpowiednią sumę mniejszych liczb i stosujemy zasadę składania. Teraz utożsamiamy X ze zbiorem $\{(x, 0) : x \in X\}$.

Przykłady

Na tym wykładzie skoncentrujemy na działaniu półgrupy $\mathbb{N}_0$ lub grupy $\mathbb{Z}$ na przestrzeni miarowej probabilistycznej. Innymi słowy będziemy rozważać układ dynamiczny (X, Σ, μ, T), gdzie (X, Σ, μ) jest przestrzenią probabilistyczną, a $T : X \to X$ jest przekształceniem mierzalnym (odwracalnym lub nie) zachowującym miarę przez przeciwobraz. (czyli spełniającymi $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, $\forall A \in \Sigma$). W przypadku odwracalnym będziemy zakładać, że T^{-1} jest również mierzalne, a wtedy warunek $\mu(T(A)) = \mu(A)$ wyniknie automatycznie. Jeśli przestrzeń jest standardowa (Σ jest przeliczalnie generowalna), a T zachwuje mierę i jest odwracalne, to można zmodyfikować T modulo równość odwzorowań prawie wszędzie, tak aby T^{-1} było mierzalne. Zatem na przestrzeniach standardowych dla odwzorowań odwracalnych wystarczy zakładać mierzalność i zachowywanie miary.

PRZYKŁAD 1. Cykl skończony. $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $T(x) = x + 1 \mod n$. Widać, że T jest odwracalne i zachowuje miarę liczącą. Aby uzyskać miarę probabilistyczną miarę tę normujemy: $\mu(A) = \frac{\#A}{n}$.

PRZYKŁAD 2. Translacja. $X = \mathbb{Z}$, $T(x) = x + 1$. Zachowywana jest miara licząca (nieskończona). Nie ma niezmienniczych miar probabilistycznych. Można tę przestrzeń uzwarcić, na przykład dodając punkty $-\infty$ i ∞ i zadając odwzorowanie $T(-\infty) = -\infty$ i $T(\infty) = \infty$ (będą to punkty stałe przekształcenia – tzw. *fixpunkty*). Wtedy zachowane będą miary probabilistyczne jednopunktowe $\delta_{-\infty}$ i δ_∞ i wszelkie ich kombinacje wypukłe, np. $\frac{2}{3}\delta_{-\infty} + \frac{1}{3}\delta_\infty$.

PRZYKŁAD 3. Obroty okręgu. Na okręgu jednostkowym (zwanym też *torusem*) $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$ rozważmy najpierw potok $T_t(z) = ze^{2\pi it}$. Można go interpretować jako sztywny obrót okręgu z prędkością kątową $2\pi/1$. Widać, że zachowywana jest miara Lebesgue'a. Z potoku tego można wyselekcjonować kaskadę przyjmując za odwzorowanie generujące $S = T_\alpha$, gdzie $\alpha \in [0, 1)$. Otrzymamy dwa skrajnie różniące się przypadki, w zależności od tego, czy α jest wymierne czy nie.

W przypadku wymiernym mnożnik $e^{2\pi i\alpha}$ jest pierwiatkiem z jedności, zatem po pewnej liczbie iteracji n będzie on równy 1 (czyli obrót o kąt zerowy). Czyli każda orbita jest cyklem jak w przykładzie 1. Jednak cały torus zawiera continuum takich cykli. Oprócz miary Lebesgue'a zachowywana jest każda miara licząca (unormowana) skupiona na pojedynczej orbicie.

Jeśli α jest niewymierna, to okazuje się, że każda orbita jest nie tylko gęsta na torusie, ale też posiada własność *ekwipartycji*, to znaczy liczba odwiedzin dowolnego łuku w n krokach (iteracjach) podzielona przez n dąży (gdy $n \to \infty$) do unormowanej miary Lebesgue'a tego łuku. Fakt ten wykażemy szczegółowo następnym razem.

Teoria ergodyczna zawiera w sobie wiele działów matematyki. Poniżej podamy kilka klasycznych przykładów układów miarowych, które pochodzą z trzech dziedzin: teorii procesów stochastycznych, algebry topologicznej i dynamiki topologicznej. (Następnym razem!)

Tomasz Downarowicz